ЗАДАЧИТЕ ОТ ОНЛАЙН СЪСТЕЗАНИЕТО „VIVA МАТЕМАТИКА С КОМПЮТЪР“ – РЕСУРС ЗА РАБОТА В STEM ЦЕНТРОВЕТЕ

Г. Гачев, П. Кендеров, Т. Чехларова

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

Резюме. Показано е как една известна задача, използвана и в онлайн състезанията „VIVA Математика с компютър“ и „Тема на месеца“, може да стане основа за занятия/разглеждания в училищните STEM центрове. Задачата е свързана с частен случай от класическата Теорема на Холдич (Holditch) и позволява развитие на различни съдържателни изследвания с помощта на системата GeoGebra. Описана е структурата на необходимите за тези изследвания помощни GeoGebra файлове.

Анализът на резултатите на участниците в споменатите състезания, които са решавали тази задача, дава основание да се счита, че разглежданията в статията са достъпни за учениците от прогимназиите и гимназиите. Освен за работа в STEM центровете, статията може да се използва при подготовка за участие в състезанието „VIVA Математика с компютър“, както и за развитие на умения за работа върху самостоятелено ученическо изследване. Съдържанието на статията би било от полза и при подготовката на бъдещите учители.

Ключови думи: Изследователски подход в образованието, STEM образование, Теорема на Holditch, онлайн състезание, дигитална компетентност, GeoGebra

Увод

Състезанията „VIVA Математика с компютър“ и „Тема на месеца“ бяха основани през 2014 г. от Института по математика и информатика на Българска академия на науките (ИМИ-БАН), Съюза на математиците в България (СМБ) и телекомуникационната компания „Виваком“ с цел подпомагане на разпространението и използването на съвременни софтуерни системи като GeoGebra (Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza 2009) при преподаването и изучаването на училищната математика (Кендеров, Чехларова & Гачев 2021). Това беше и продължава да е една от основните цели и на Виртуалния училищен кабинет по математика (www.cabinet.bg), създаден и поддържан от ИМИ-БАН от 2013 година (Chehlarova et al 2014). Състезанието „Тема на месеца“ имаше за задача бързо да се създаде необходимия минимален обем от помощни материали. След 42 на брой издания и постигане на тази цел, състезанието „Тема на месеца“ бе прекратено в средата на 2018 година. Състезание „VIVA Математика с компютър“ продължава да се провежда. Повече информация и за двете състезания може да се намери в рубриката „Състезания“ на Виртуалния училищен кабинет по математика, където е дадена възможност и за тренировка: посетителят може да избере и решава задачите от някой Работен лист, даван на състезанията. След това, ако пожелае, може да види и верните отговори. На същото място могат да се намерят верните отговори на много от изданията на състезанието „VIVA Математика с компютър“. На адрес www.vivacognita.org може да се намери информация за начините за участие в състезанието, както и възможност за самостоятелна подготовка.

Характерна особеност на много от задачите в двете състезания е необходимостта от провеждане на изследване с компютър, което подпомага намирането на решението (с изискваната в условието на задачата точност). За целта, много от задачите са снабдени с помощни GeoGebra файлове, които улесняват такова експериментално изследване. Анализирането на това, как и защо тези файлове „работят“, как са построени и как се използват, ги прави подходящи за разглеждане и изучаване при STEM образованието. В процеса на анализиране и разработване на такива файлове едновременно се развиват и тренират: алгоритмично (конструктивно, инженерно) мислене, базови умения за опростено програмирне (в GeoGebra среда) и навици за използване на математически знания при решаване на конкретни задачи, някои от тях – с практическа насоченост. Всичко това е една реализация на изследователския подгод в образованието.

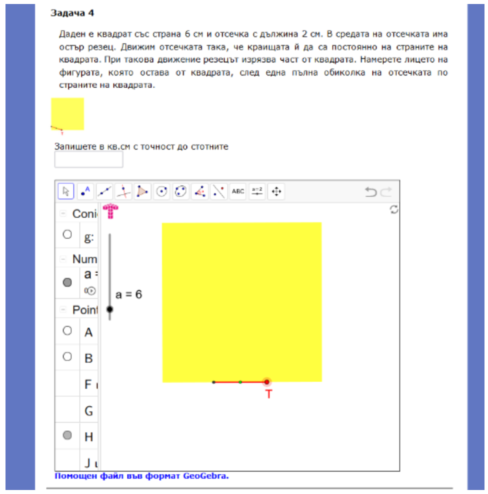
Една задача от състезанието „VIVA Математика с компютър“

В тази статия разглеждаме подробно следната задача, която бе включена в Работните листове за 8. клас и за 11. клас на състезанието „VIVA Математика с компютър“, проведено през декември 2015 година, както и в Работния лист със задачите за 8. клас на същото състезание през 2021 година:

„Даден е квадрат със страна 6 cm и отсечка с дължина 2 cm. В средата на отсечката има остър резец. Движим отсечката така, че краищата ѝ да са постоянно на страните на квадрата. При такова движение резецът изрязва част от квадрата. Намерете лицето на фигурата, която остава от квадрата, след една пълна обиколка на отсечката по страните на квадрата.

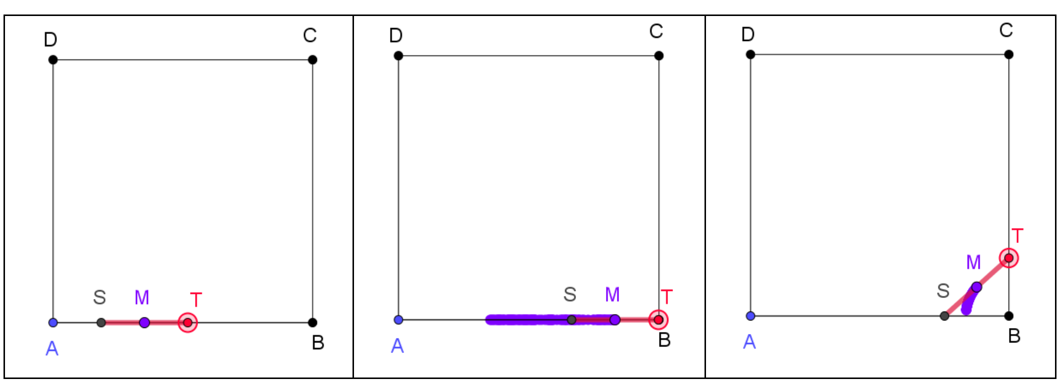
Запишете в cm^2 с точност до стотните.“

Част от Работния лист от онлайн състезанието е представено на фиг. 1.



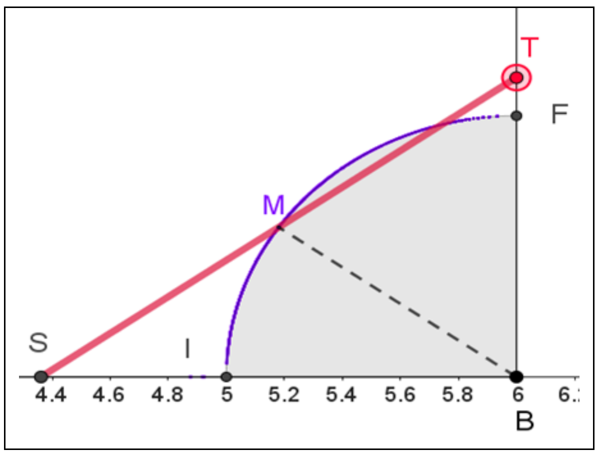
Фигура 1. Част от Работния лист за 8. клас от онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“, проведено през декември 2015 г.

На участниците в състезанието бе предоставен помощен файл, който позволява задачата да бъде изследвана и решена със зададената точност. Тук, с образователна цел, ще използваме опростени модификации на същия файл, чрез които обучаемите ще осъзнаят по-добре задачата и ще придобият представа как действат файловете на системата GeoGebra. Същината на задачата е представена частично на фигури 2а, 2б и 2в. На долната страна AB на квадрат със страна 6 cm е разположена червена отсечка ST с дължина 2 cm. Средата на отсечката, точка M, където е резецът, е представена с оцветена в тъмно синьо точка M. При движение на отсечката по указания в условието на задачата начин, точка M оставя синя следа, която очертава изрязаната част от квадрата (фиг. 2б и 2в). Ясно е, че точка M ще се движи предимно по страните на квадрата и ще се отклонява от тях (т.е. ще изрязва нещо от вътрешността на квадрата) само когато краищата на червената отсечка се движат по различни съседни страни на квадрата. Част от изрязването, причинено от такова движение на отсечката, е показано на Фигура 2в.



Фигура 2а **2б** **2в.**

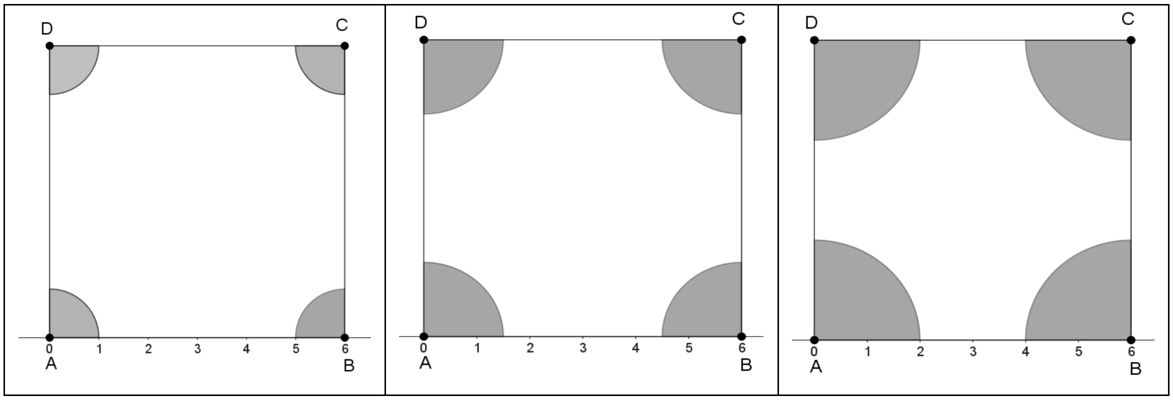
За да намерим лицето на цялата изрязана част, поради симетричността на квадрата, е достатъчно да намерим лицето само на изрязаното парче, когато точка T тръгне от десния долен връх на квадрата (точка B) и се движи нагоре по дясната му страна BC, докато другият край S на отсечката, движейки се по долната страна AB, стигне до точка B. За визуализиране на изрязаната около върха B част от квадрата, можем да използваме GeoGebra файл1[1]. Файлът е „динамичен“ – точка T може да се „хване и влачи“ по страната BC на квадрата, при което цялата отсечка ST се движи заедно с нея, а средата на отсечката, точката M, оставя при това движение синя следа. Уголемен образ на изрязаната около точка B част на квадрата е представен на фигура 3. Точките I и F имат координати съответно (5; 0) и (6; 1) и са краищата на линията на изрязване. Отсечката BM е медиана в триъгълника SBT и е изобразена с пунктирана линия.



Фигура 3. Следа на средата M при движение на точката T по страната BC

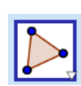
Видът на отрязаната част ни подсказва, че изрязаната част може би е кръгов сектор с раствор 90°. Веднъж подсетени, можем да съобразим, по чисто математически път, че наистина изрязаното парче е кръгов сектор. При движението на отсечката ST, пунктираната отсечка BM е винаги медиана на правоъгълния триъгълник SBT и следователно има дължина, равна на половината от дължината 2 cm на хипотенузата ST. Значи, точка M винаги е на разстояние 1 cm от точка B и следователно лежи на окръжност с цетър точката B и радиус 1 cm. По подобен начин, при пълно завъртане на отсечката ST по контура на квадрата, се изрязват кръгови сектори и около върховете C, D и A (фиг. 4а). От четирите отрязани части може да се сглоби кръг с радиус 1 cm. Лицето на отрязаните краища общо е πr^2, където в случая r = 1 cm. Тук е уместно да отбележим, че лицето на изрязаната част не зависи от размера на страната на квадрата, а само от дължината d на движещата се отсечка.

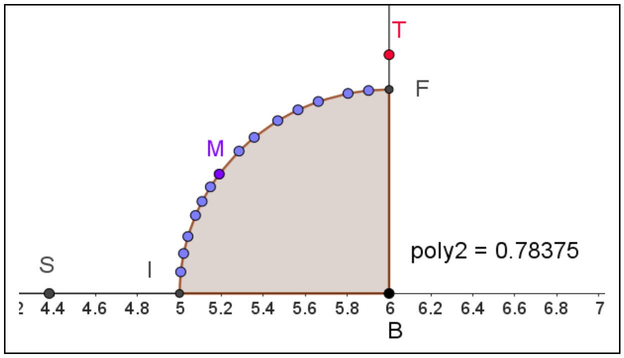
Това лице винаги е $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$. На фигури 4б и 4в са визуализирани случаите, когато движещата се отсечка има дължина d = 3 cm и съответно d = 4 cm. Лицето на изрязаната част в единия случай е $\frac{9}{4}\pi$, а в другия - 4π квадратни сантиметри.



Фигура 4а **4б (d=3)** **4в (d=4)**

Точният отговор на задачата, получен по математически път, се пресмята, като от лицето на квадрата (36 см^2) извадим лицето на отстранения кръг ($\pi\ cm^2$): 36 - $\pi\ cm^2$. Тъй като изискваната точност в задачата е до стотните, в полето за вписване на отговор за тази задача следва да внесем числото 36 - 3,14 = 32,86 cm^2.

Ролята на компютъра при това решение на задачата беше скромна – да ни подскаже, че всяко от четирите изрязани парчета е една четвърт част от кръг с радиус 1. За доказателство използвахме математически факт – че дължината на медианата, спусната към хипотенузата на правоъгълен триъгълник, е равна на половината от дължината на хипотенузата. Задачата обаче може да се реши със задоволителна точност чрез помощния файл, без използване на този математически факт. Избираме няколко точки от изрязаната около точка B крива. Колкото повече точки изберем – толкова по-добре. Следим обаче точките да са разпределени относително равномерно върху кривата (като на фиг. 5). След активиране на бутона за построяване на многоъгълник , обхождаме последователно “с щракване“ избраните точки, като започнем от точка B и се върнем накрая отново в нея. GeoGebra пресмята автоматично лицето на този многоъгълник с много върхове и записва лицето му като Poly2 = $0{,}78375$. Значи, общото лице на изрязаните четири парчета е приблизително $4 \times 0{,}78375 = 3{,}135$. В задачата е указано отговорът да се запише с точност до стотните. Числото 3,135 е уместно да се закръгли „нагоре“ – на 3,14, защото построеният от GeoGebra многоъгълник се съдържа в кръговия сектор и лицето му е по-малко от лицето на сектора. Затова ще използваме стойността 3,14 и можем да запишем като отговор 36 – 3,14 = 32,86.

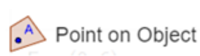


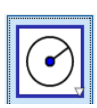
Фигура 5. Използване на лице на многоъгълник

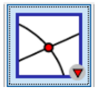
При оценяването на решенията на участниците в състезанието „VIVA Математика с компютър“ се взема предвид колко близо (или колко далеч) е отговорът на участника от верния отговор (Gachev 2015). Всяка стотна отклонение от верния отговор води до намаляване на оценката с една точка. Максималният брой точки за тази задача е 10. Приближеното решение (получено чрез лицето на многоъгълника) би получило 10 точки, ако участник в състезанието запише като отговор 32,86 и 9 точки, ако запише 32,87 или 32,85.

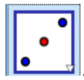
Нека сега проследим как е направен файл1[1], с чиято помощ визуализирахме изрязаната част при върха B и се досетихме, че е изрязан кръгов сектор с раствор 90°.

- Чрез командния ред въвеждаме и изпълняваме последователно командите A=(0, 0), B=(6, 0), C=(6, 6) и D=(0, 6). С тези команди построяваме върховете на квадрата.
- Чрез бутона 

 построяваме отсечките AB, BC, CD и DA, които са страни на квадрата.
- Активираме бутона 

 и избираме точка от отсечката BC, на която даваме име T .
- Активираме бутона , който построява окръжност по дадени център и радиус и посочваме точка T като център и числото *2* като радиус.

- С бутона  намираме пресечна точка на построената в предната стъпка окръжност и отсечката AB. Ако точка T е избрана така върху отсечката BC, че разстоянието от нея до точка B да е по-малко от 2 , тази пресечна точка ще се появи на екрана. Даваме й име S .

- Активираме бутона , с който намираме средата M на отсечката ST.

С това построяването на файл1 е завършено.

Ако поставим точка M в режим „Оставяне на среда“ (Trace on) и движим точка T (при активиран бутон ) , на екрана ще се изобрази фигура 2в.

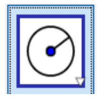
За по-точно изобразяване на изрязаната крива, или ако не искаме да ползваме режима „Оставяне на следа“, можем да доразвием файл1, като добавим към него и командата за “Геометрично място на точки“, която изобразява на екрана всички точки M, които се получават, когато точка T се движи по отсечката BC. Тази команда се задейства чрез активиране на бутона  , последвано от щракване вурху точките T и M. Резултатът от действието на тази команда е показан на фигура 6.

Направеният файл1 е лесен за направа и използване, но има и един сериозен недостатък. Той ни позволява да изследваме изрязването само при един квадрат - с дължина на страната $a = 6$ cm и дължина на движещата се отсечка $d = 2$ cm. Ако искаме да изследваме какво става с друг квадрат (и/или с друга движеща се отсечка), трябва да направим нов файл, като отново зададем координатите на върховете A, B, C и D и дължината d на радиуса на окръжността с център в точка, или да коригираме стойности във вече готовия файл. Не е трудно, обаче, да се използва идеята от направата на файл 1, за да се направи файл2[2], който да позволява изследването на много квадрати и движещи се отсечи. Ето необходимите промени:

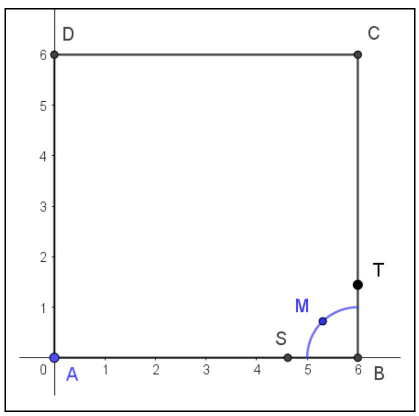
- Чрез бутона 

от лентата с инструменти на GeoGebra въвеждаме плъзгач за променлива величина (параметър) *a,* с който ще задаваме дължината на страната на квадрата. Със същия бутон въвеждаме и плъзгач за параметър *d,* с който ще задаваме дължината на движещата се отсечка. С това целим помощният файл да може да действа при различни (избрани от нас) стойности на *a* и *d*.

- При задаването на върховете на квадрата използваме командите А= (0, 0), B = (*a*, 0), C = (*a, a*) и D = (0, *a*). GeoGebra построява върховете, като използва зададената от нас (чрез плъзгача за *a*) числена стойност на *a.*

- При активиран бутон  (за построяване на окръжност по дадени център и радиус) и посочена точка Т като център, нанасяме в диалоговия прозорец буквата *d* като радиус. GeoGebra изчертава окръжност с център в Т и радиус – зададената от нас (чрез плъзгача за *d*) стойност на параметъра *d*.

Останалите команди се запазват, включително и командата за Геометрично място на точки (фиг. 6).

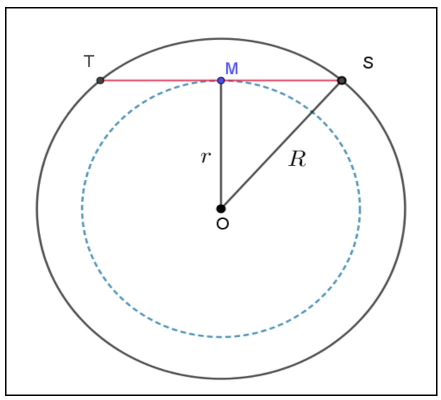


Фигура 6. Използване на командата за геометрично място на точки

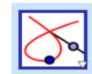
Като упражнение, на обучаемите може да се предложи да видоизменят двата файла, или да направят изцяло нови, които да визуализират изрязванията в участъците около върховете C, D и A на квадрата. Друг уместен въпрос е „Каква е най-голямата дължина на движещата се отсечка, кри която може да се направи пълно завъртане в квадрат със страна *a*?“

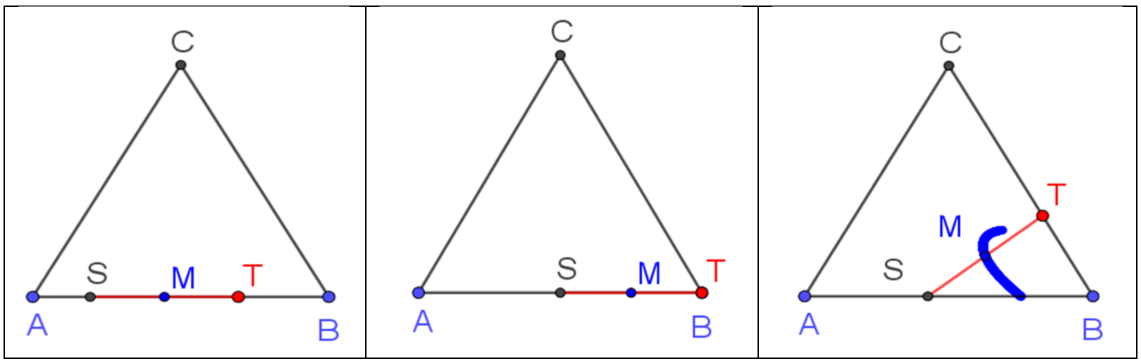
Работният лист на състезанието „Математика с компютър“ съдържа 10 задачи, а времето за решаването им е само 60 минути. Въпреки тези ограничителни условия, много от учениците са се справили успешно с тази задача. От общо 147 участника, на които е била предложена тази задача, 46 не са дали отговор на задачата и не е ясно каква част от тях изобщо не са се опитвали да я решат. Тридесет и двама са посочили точен отговор и са получили пълен брой точки. Още 26 са посочили отговор, отклоняващ се с по-малко от 10% от точния отговор. Други 10 са дали точен или приблизително точен отговор, но за лицето на изрязаната част, а не за лицето на останалата след изрязването част от квадрата (както се изисква в условието на задачата). Може да се очаква, че ако тази задача е обект на отделно занятие в клас или в STEM център, с подпомагане от страна на водещия занятието, тя ще бъде решена успешно от почти всички ученици.

Интересно е да се види какво става, когато отсечката се върти и обхожда контура на други фигури, не само на квадрата. Най-простият случай е, когато краищата на отсечка с дължина d се движат по окръжност с радиус R (фиг. 7). Тогава средата M на отсечката е на *разстояние* $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ от центъра на кръга и при едно пълно завъртане изрязва от него един „кръгов венец“ с ширина $R - r$. Лицето на този кръгов венец е $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$. Виждаме отново, че лицето на изрязания венец зависи само от дължината на обхождащата отсечка, но не и от размера (радиуса R) на началния кръг.



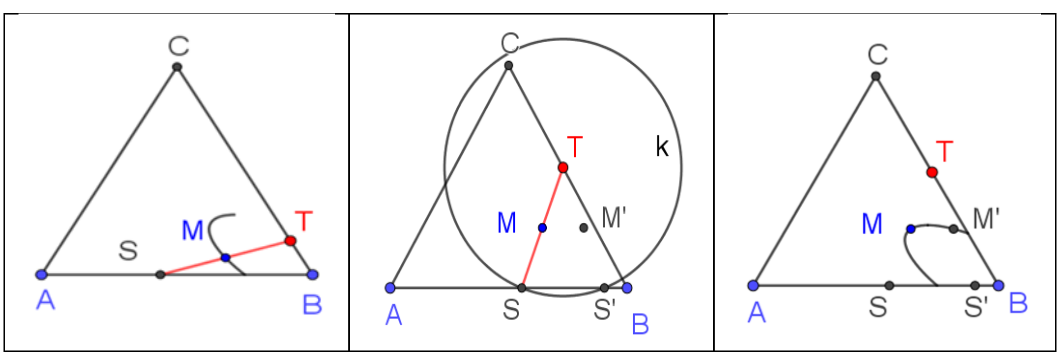
Фигура 7. Движение на краищата на отсечка по окръжност

По-интересни ефекти възникват, когато обхожданата от отсечката ST фигура съдържа остри ъгли. Ще разгледаме подробно случая, когато фигурата е равностранен триъгълник ABC със страна 8 cm, а движещата се отсечка ST е с дължина 4 cm. И тук, както и при квадрата, е достатъчно да разберем какво става при движение на отсечката около един от върховете, например върха B. Резецът в точка M не изрязва нищо от триъгълника, когато отсечката ST се движи отляво-надясно върху страната AB (фиг. 8а и 8б). Интересна особеност тук се наблюдава, когато точка T започне да се движи от B към C по страната BC. Точка S отначало тръгва да се връща назад към точка A и след това отново се насочва към точка B. Това личи ясно от оставяната от точка M следа (фиг. 8в). Файл3[3], с който е направена тази визуализация, се основава на същата идея, която използвахме при квадрата: Вземаме точка T от страната BC и построяваме окръжност k с център в точка T и радиус 4 cm. Ако отсечката ТВ е по-къса от 4 cm, построената окръжност *k* ще има само една обща точка S с отсечката AB. Означаваме с М средата на отсечката ST и я поставяме в режим „Оставяне на следа“. По-точна представа за разположението на точките М, получени чрез този файл, е дадена на фигура 9а. Тя е получена с използване на бутона  за геометрично място на точки.

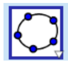
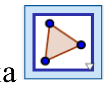


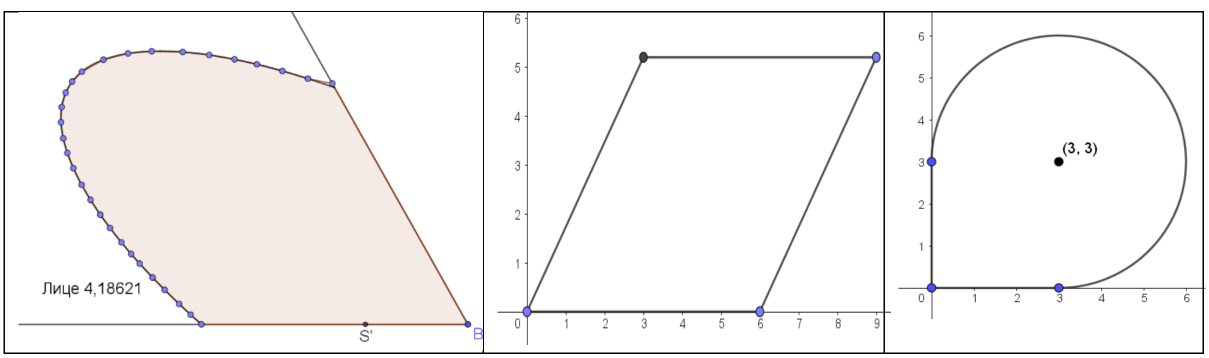
Фигура 8а **8б** **8в**

Виждаме, че файлът не реализира пълно изрязване. Естествено е да се запитаме, защо пропускаме части от изрязването? Защо при квадрата с подобен файл успяхме да решим задачата, а тук намираме само част от разреза? Когато дължината на ТВ е по-голяма или равна на 4 cm, пресечните точки на окръжността *k* с отсечката AB могат да са две – S и S' (Фигура 9б). Отсечката TS' също ще се появява в процеса на обхождането на триъгълника и трябва да вземем предвид и разреза, определен от нейната средна точка M'. Фигура 9в показва резултата от изрязването, причинено от М и M', при използване на файл4[4].



Фигура 9а **9б** **9в**

Изрязаното парче не прилича на част от кръг или на някой от добре известните ни геометрични обекти. GeoGebra има инструмент (бутон), чрез който да се провери, дали тази крива не е част от елипса, парабола или хипербола (конично сечение). Това е бутонът . След активиране на този бутон, трябва с щракване да се изберат пет точки от кривата. GeoGebra автоматично изчертава конично сечение, съдържащо избраните точки. В нашия случай се оказва, че кривата е част от елипса. GeoGebra обаче пресмята лицето на цялата елипса, а не на парчето от тази елипса, което ни интересува. Затова ще пресметнем лицето на многоъгълник, който е близък по форма и площ до това парче. Както и при кръговия сектор по-горе, активираме бутона  за лице на многоъгълник и щракваме последователно върху достатъчно много точки от разреза, тръгвайки от точка B и връщайки се отново в нея. Резултатът е показан на фиг. 10а. Лицето на многоъгълника е 4,18621. Според теоремата на Холдич, за която ще стане дума по-долу, общото лице на трите изрязани парчета в равностранния триъгълник е $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$, където d = 4 см. Т.е. 4π. Намереното от нас лице се отличава само в хилядните от $\frac{4}{3}\pi$. За целите на състезанието, такава точност е напълно достатъчна.



Фигура 10а **10б** **10в**

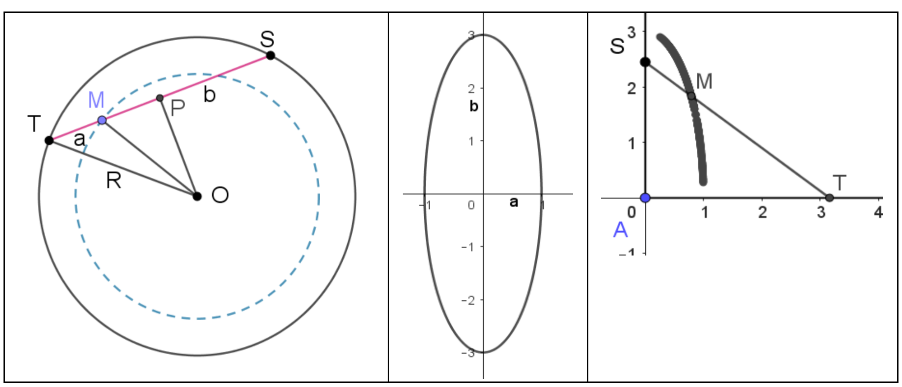
Във връзка с триъгълника могат да се поставят най-различни задачи и въпроси. Ето част от тях: Как е построен върхът C на триъгълника ABC във файловете 3 и 4? Каква е дължината на отсечката TB, когато двете точки S и S' съвпаднат? Каква е дължината на отсечката TB, когато точка M е най-вляво? Каква е дължината на отсечката TB, когато точка M е най-високо? Каква е дължината на линията на разреза? Колко е дълга най-голямата отсечката ST, която може да обходи страните на равностранен триъгълник със страна 6 cm? Какво остава от триъгълника със страна 8 cm, ако режещата отсечка е 5 cm?

Като задача за самостоятелна работа може да се поиска от обучаемите да намерят лицето на остатъка, след изрязване с отсечка с дължината d = 3 cm, когато обхожданото множество е ромб с остър ъгъл 60° (фиг. 10б) или множеството, представено на фигура 10в.

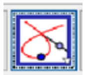
Какво става, когато режещата точка не е в средата на движещата се отсечка?

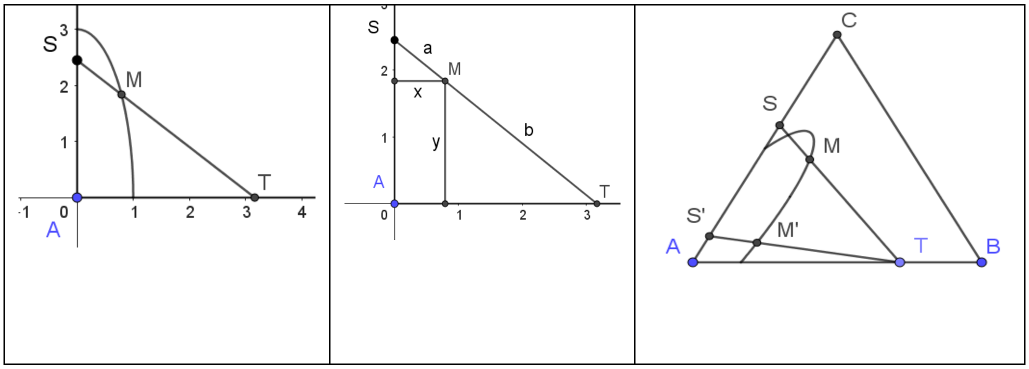
За да се ориентираме, отново ще разгледаме частните случаи, когато обхожданото множество е кръг, квадрат или равностранен триъгълник. На фигура 11а е представен кръг с радиус R и обхождаща отсечка ST с дължина $a+b$, $b \geq a$. Разстоянието от T до режещата точка M е a , а разстоянието от M до точка C е b . Точка P е среда на отсечката ST. Следователно SP = PT= $\frac{a+b}{2}$, а MP = TP – TM= $\frac{b-a}{2}$. Съгласно теоремата на Питагор $OP^2 = R^2 - SP^2 = R^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ и $OM^2 = OP^2 + MP^2 = R^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = R^2 - ab$. Следователно, при движението на отсечката ST точката M описва окръжност с радиус $\sqrt{R^2 - ab}$ и изрязва от кръга една кръгова ивица с ширина $R - \sqrt{R^2 - ab}$. Лицето на тази кръгова ивица е $\pi R^2 - \pi(R^2 - ab) = \pi ab$ и не зависи от радиуса R на изходния кръг. Когато M е в средата на ST (т.е. $a = b$), стигаме до установения по-горе резултат за кръг.

Добре известно е, че елипсата с полуоси a и b има лице πab. На Фигура 11б е изобразена елипса с $a = 1$ и $b = 3$. Лицето ѝ е 3π. Как и защо лицето на изрязаната от кръга кръгова ивица се оказва равно на лицето на елипса с полуоси a и b в този случай не е ясно.



Фигура 11а **11б** **11в**

Когато същата отсечка обхожда квадрат, връзката на изрязаното множество с елипсата е очевидна. На Фигура 11в е изобразен случаят, когато движещата се отсечка има дължина 4, SM = 1, MT = 3 и точката T се движи по страната AB на квадрата, а точка S я следва, движейки се по страната AC. За по-голяма прегледност можем да ползваме бутона  за очертаване на геометричното място на точките M. Резултатът е показан на (фиг. 12а).



Фигура 12а **12б** **12в**

Математическата същност на ситуацията е изобразена на фигура 12б. Числата x и y са координатите на точка M. От подобието на участващите триъгълници получаваме

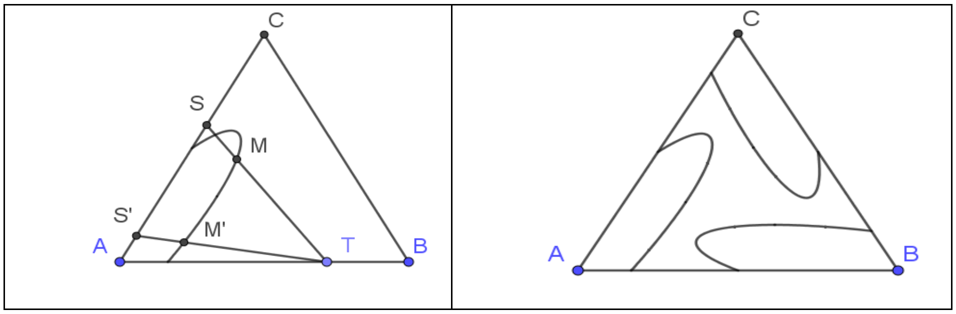
$$\frac{AT}{a+b} = \frac{x}{a} \text{ и } \frac{AS}{a+b} = \frac{y}{b}\,.$$

От теоремата на Питагор следва, че

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{AT}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{AS}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{T}S}{a+b}\right)^2 = 1\,.$$

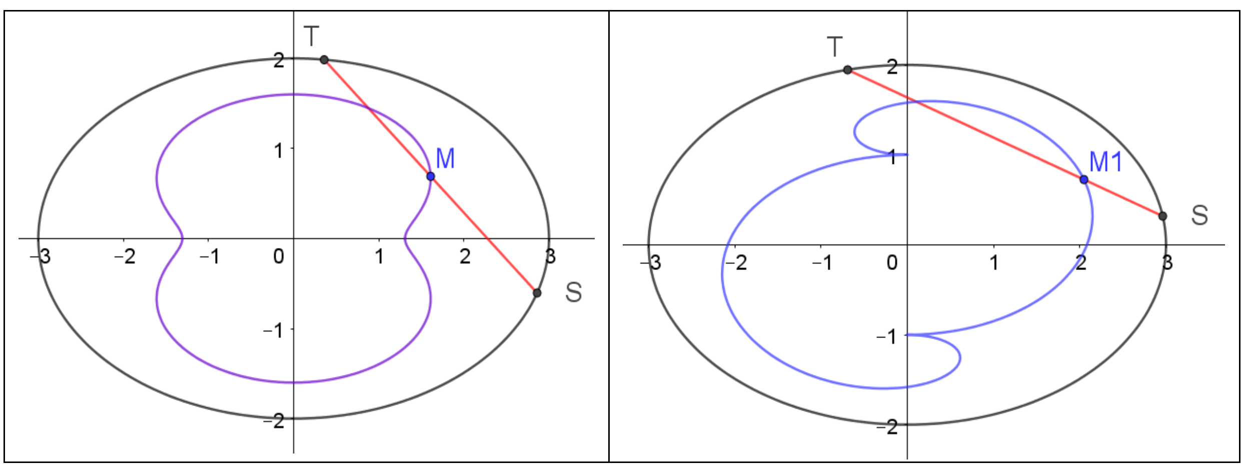
Една от многото дефиниции на елипсата с полуоси a и b е “Множеството от всички точки, чиито координати x и y удовлетворяват уравнението $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$“. Следователно, изобразената на фигура 12а крива е четвъртинка от елипса. Когато отсечката ST се движи около останалите три върха B, C и D на квадрата, отново ще се получат четвъртинки от елипсата. Виждаме, че от четирите изрязани части на квадрата може да се сглоби елипса с полуоси a и b, като общото лице на изрязаните части е πab.

При обхождане на равностранен триъгълник връзката с елипсата отново се губи. На фигури 13а и 13б са онагледени изрязаните множества. Не се вижда, как от тях да се сглоби елипса, но при приближено измерване на лицата на трите части, както по-горе, получаваме за сумата им стойности, близки до πab. Това не следва да ни учудва. През 1858 година Хамнет Холдич (Holditch 1958) от Cajus College в Cambridge доказва, че разгледаният по-горе феномен („изрязаната ивица има лице πab“) остава в сила, дори когато отсечката с дължина $a + b$ обхожда произволна, но „достатъчно благородна“ (от гледна точка на математическия анализ) затворена крива.



Фигура 13а **13б**

Елипсата, без съмнение, е една от най-благородните криви и за нея е в сила теоремата на Холдич. На Фигура 14а е представена елипса с полуоси $a = 3, b = 2$. Движещата се в нея отсечка е с дължина $d = 3{,}6$ и режещата точка M е в средата на отсечката. Лицето на получения венец, според теоремата на Холдич е $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$. За същата елипса, на фигура 14б, е представен изрязаният от точка M1 „венец“, когато $d = 4$, SM1=1, TM1=3. Лицето на венеца, съгласно теоремата на Холдич е 3π . Експерименти с други елипси и други режещи точки могат да се правят с помощта на файл5[5].



Фигура 14а **14б**

От формална гледна точка, доказателството на Холдич не е валидно за разгледаните по-горе квадрат и равностранен триъгълник. По-съвременно изложение на теоремата на Холдич, което покрива и тези случаи, може да се намери в (Broman 1981) и (Monterde & Rochera 2017). Популярно изложение на частни случаи от теоремата на Холдич може да се намери, включително на български език в (Кендеров, Коларов 1983) и (Kenderov, Kolarov 1984).

Задачата за падащата стълба с котка на нея

Разгледаната в началото задача за квадрата се радва на забележителна популярност, като допуска много на брой различни формулировки. Тук ще споменем част от тях. Знаменитата книга на Н. Б. Васильев и В. Л. Гутенмахер „Прямые и кривые“ (Васильев & Гутенмахер 2006) започва със следната задача: „Опряна на стената стълба се приплъзва и пада на гладкия под. По каква линия се движи коте, седящо на средата на стълбата?“ Същата задача под номер 200 е формулирана в книгата на А. Шень (Шень 2017). Задачата със същите обекти в нея - стълба и котка, е намерила място и в статията на (Trigo 2020), поместена в Международния наръчник за образованоие на учители по математика и в помагалото (Trigo & Martínez 2013).

Ето и някои български удачни формулировки на същата, от математическа гледна точка, задача: „Крадец стигнал точно до средата на стълбата, по която се опитвал да стигне до прозорец на апартамент, когато тя започнала да се плъзга по стената и накрая паднала (заедно с крадеца). Случаен минувач (с математическа мисъл) успял да види кривата, описана от светещото фенерче в ръката на крадеца, и да разбере какво става, въпреки тъмнината. Какво е видял той?“ (Чехларова, Димкова & Сендова 2010).

„Тема на месец Май 2016“ на състезание „Тема на месеца“ е посветена на задачата за стълбата:

„Кошница с пренебрежимо малък размер е закрепена на кол, който е опрян на стена.

Задача 1. Колът с дължина 7,28 m започва да се плъзга до падането му върху земята, перпендикулярно на стената. Колко метра е преодоляла закрепената кошница при движението на кола, ако закрепването ѝ е:

а) в средата на кола

б) на два метра от горния връх на кола

в) в горния връх на кола?

Запишете с точност до стотните.“

Цялата тема на месец май 2016 може да бъде намерена във Виртуалния училищен кабинет по математика[6].

Закючение

Анализът на резултатите на участниците в споменатите състезания, които са решавали тази задача, дава основание да се счита, че разглежданията в статията са достъпни за учениците от прогимназиите и гимназиите. Освен за работа в STEM центровете, статията може да се използва при подготовка за участие в състезанието „VIVA Математика с компютър“, както и за развитие на умения за работа върху самостоятелено ученическо изследване. Съдържанието на статията би било от полза и при подготовката на бъдещите учители.

БЕЛЕЖКИ

[1] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15164.html
https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15164.ggb

[2] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15165.html
https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15165.ggb

[3] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15166.html
https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15166.ggb

[4] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15167.html
https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15167.ggb

[5] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15168.html
https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15168.ggb

[6] www.cabinet.bg

ЛИТЕРАТУРА

BROMAN, A., 1981. Holditch's Theorem. *Mathematics Magazine*. Vol. 54, No. 3, pp. 99-108

CHEHLAROVA, T., GACHEV, G., KENDEROV P. & SENDOVA, E., 2014. A Virtual School Mathematics Laboratory. *V-та Национална конференция по електронно обучение.* Русе, pp.146-151.

ЧЕХЛАРОВА, Т., ДИМКОВА, Д. & СЕНДОВА. Е., 2010. Въздушни следотърсачи с GeoGebra (Математическа приказка за падащата стълба). *Математика и информатика*, бр. 6, с. 3-13

GACHEV, G., 2015, A system for online assessment of mathematical knowledge, in Kovatcheva, E., Sendova, E (eds.) *UNESCO International Workshop Quality of Education and Challenges in a Digitally Networked World*, Za Bukvite, O'Pismeneh, Sofia, Bulgaria, pp. 117 – 122.

HOHENWARTER, J., HOHENWARTER, M. & LAVICZA, Z., 2009. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. 28, 2, 135 – 146.

HOLDITCH, H., 1858. Geometrical theorem, *The Quarterly J. Pure Appl. Math* 2, 38.

КЕНДЕРОВ, П., ЧЕХЛАРОВА, Т. & ГАЧЕВ. Г., 2021. Онлайн състезание "VIVA Математика с компютър". *Математика и информатика*. 64, бр. 1, 36 – 51.

KENDEROV, P., KOLAROV. K., 1984. Twierdzenia Holditcha, Delta, *Popularny miesiecznik Matematicno-FizycnoAstronomicny*, No 8(128), p. 6-7

КЕНДЕРОВ, П., КОЛАРОВ. К., 1983. Теорема на Холдич. *Математика,* бр. 7, 6 – 10.

MONTERDE, J., ROCHERA, D., 2017. Holditch's Ellipse Unveiled. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 124, Issue 5, pp 403 – 421

TRIGO, M. & MARTÍNEZ., I., 2013. An Interactive Problem Solving Activity: The Cat and the Ladder.

TRIGO, M., 2020. Prospective and Practicing Teachers and the Use of Digital Technologies in Mathematical Problem-Solving Approaches, Pages: 163–195, In Salvador Llinares and Olive Chapman (Editors) International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2, (Tools and Processes in Mathematics Teacher Education, Second Edition).

ВАСИЛЬЕВ, Н. Б. & ГУТЕНМАХЕР, В. Л., 2006. Прямые и кривые. Наука. Москва.

ШЕНЬ, А., 2017. Геометрия в задачах, МЦНМО.

NOTES

[1] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15164.html
https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15164.ggb

[2] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15165.html
https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15165.ggb

[3] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15166.html
https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15166.ggb

[4] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15167.html

https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15167.ggb

[5] https://cabinet.bg/content/bg/html/d15168.html

https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d15168.ggb

[6] www.cabinet.bg

REFERENCES

BROMAN, A., 1981. Holditch's Theorem. *Mathematics Magazine*. Vol. 54, No. 3, pp. 99-108

CHEHLAROVA, T., GACHEV, G., KENDEROV, P. & SENDOVA, E., 2014. A Virtual School Mathematics Laboratory. *V-та Национална конференция по електронно обучение.* Русе, pp.146-151.

CHEHLAROVA, T., DIMKOVA, D. & SENDOVA, E., 2010. Air trackers with GeoGebra (Mathematical fairytale about the falling ladder). *Mathematics and Informatics*, Vol. 6, pp. 3-13 [In Bulgarian]

GACHEV, G., 2015, A system for online assessment of mathematical knowledge, in Kovatcheva, E., Sendova, E (eds.) *UNESCO International Workshop Quality of Education and Challenges in a Digitally Networked World*, Za Bukvite, O'Pismeneh, Sofia, Bulgaria, pp. 117 – 122.

HOHENWARTER, J., HOHENWARTER, M. & LAVICZA, Z., 2009. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. 28, 2, 135 – 146.

HOLDITCH, H., 1858. Geometrical theorem, *The Quarterly J. Pure Appl. Math* 2, 38.

KENDEROV, P., CHEHLAROVA, T. & GACHEV, G., (2021). Online Competition "VIVA Mathematics with Computer". *Mathematics and Informatics*. vol. 64, no. 1, 36 – 51. [In Bulgarian]

KENDEROV, P., KOLAROV. K., 1984. Twierdzenia Holditcha, Delta, Popularny miesiecznik Matematicno-FizycnoAstronomicny, No 8(128), p. 6-7

KENDEROV, P., KOLAROV. K., 1983. On a theorem of Holditch, Mathematica Journal, Issue 7, p. 6 – 10 [In Bulgarian]

MONTERDE, J., ROCHERA, D., 2017. Holditch's Ellipse Unveiled. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 124, Issue 5, pp 403 – 421

TRIGO, M. & MARTÍNEZ., I., 2013. An Interactive Problem Solving Activity: The Cat and the Ladder.

TRIGO, M., 2020. Prospective and Practicing Teachers and the Use of Digital Technologies in Mathematical Problem-Solving Approaches, Pages: 163–195, In Salvador Llinares and Olive Chapman (Editors) International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2, (Tools and Processes in Mathematics Teacher Education, Second Edition).

ВАСИЛЬЕВ, Н. Б. & ГУТЕНМАХЕР, В. Л., 2006. Прямые и кривые. Наука. Москва.

ШЕНЬ, А., 2017. Геометрия в задачах, МЦНМО.

THE TASKS FROM ONLINE COMPETITION "VIVA MATHEMATICS WITH A COMPUTER": A RESOURCE FOR WORK IN STEM CENTERS

G. Gachev, P. Kenderov, T. Chehlarova

Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences

Resume: It is shown how a well-known task, also used in the „VIVA Mathematics with Computer“ and “Theme of the Month” online competitions, can become a base for regular classes and/or explorations in school STEM centers. The task is related to a special case of the classical Holditch theorem and allows the development of various substantive studies using the GeoGebra system. The structure of the necessary GeoGebra auxiliary files for these studies is described.

The analysis of the results of the participants in the mentioned competitions gives a reason to consider that the tasks in the article are accessible to students from upper secondary education. In addition to work in STEM centers, the article can be used in preparation for participation in the "VIVA Mathematics with a Computer" competition, as well as for developing skills for working on independent student research. The article would also be useful in the preparation of future teachers.

Keywords: Inquiry based education, STEM education, Holditch's theorem, online competition, digital competence, GeoGebra

Dr. Georgi Gachev
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-7297-0888
Researcher ID JGD-0380-2023
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia, Bulgaria
E-mail: gachev@math.bas.bg

Prof. Petar Kenderov, DSc.
ORCID iD: 0000-0001-9277-9709
Web of Science ResearcherID: R-9134-2019
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia, Bulgaria

E-mail: kenderovp@cc.bas.bg

Prof. Dr. Toni Chehlarova
ORCID iD: 0000-0001-8472-5217
Researcher ID (Web of Science): AAW-7402-2021
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia, Bulgaria
E-mail: toni.chehlarova@math.bas.bg